

Spenglers duiding van de wiskunde als cultuurfenomeen

Emanuel Rutten

Welke rol speelt wiskunde in het denken van Spengler? In zijn hoofdwerk *De ondergang van het avondland* uit 1917 neemt de wiskunde ontegenzeggelijk een belangrijke plaats in. De titel van het eerste hoofdstuk – over de betekenis van getallen – verwijst er niet voor niets al naar.

Bekend is uiteraard dat volgens Spengler elke cultuur een bepaalde levenscyclus doormaakt en gekenmerkt wordt door een specifieke cultuurziel. Deze cultuurziel drukt zich uit op een groot aantal verschillende culturele en maatschappelijke terreinen. Alle cultuurfenomenen binnen een cultuur zijn ten diepste te begrijpen als veruitwendigingen of manifestaties van die ene cultuurziel die de gehele cultuur in kwestie bezielt, draagt en in stand houdt.

Nu begrijpt Spengler de wiskunde eveneens als een cultuurfenomeen. Iedere cultuur drukt dus vanuit haar eigen verborgen ziel haar eigen wiskunde uit. Iedere cultuur heeft zijn eigen specifieke wiskunde precies omdat zelfs de wiskunde net zoals muziek, architectuur, politiek en alle andere cultuurfenomenen een uitdrukking is van de ziel van een cultuur. Zelfs de wiskunde is volgens Spengler dus een cultureel bepaald verschijnsel en niet universeel. Dit gaat uiteraard radicaal in tegen de gangbare Platoonse opvatting van wat wiskunde is.

In zijn boek behandelt hij vervolgens de wiskunde van een aantal verschillende culturen. In wat volgt zal ik stilstaan bij twee daarvan, namelijk de wiskunde van de Griekse Oudheid oftewel de klassieke tijd en de wiskunde van het Avondland oftewel het Europese Westen. Om goed te begrijpen hoe deze twee zich tot elkaar verhouden dienen we op grond van het voorgaande dus eerst na te gaan hoe beide cultuurzielen zich precies tot elkaar verhouden.

Welnu, de ziel van de Griekse Oudheid is apollinisch. Ze wordt gesymboliseerd door het oersymbool van het zintuiglijk waarneembare individuele menselijke lichaam dat zich in een vaste, begrensde en welbepaalde onveranderlijke vorm in onze nabijheid voor ons bevindt. Deze typische gerichtheid op het menselijke waarnemen, op het “zien”, vinden we onder andere in de openingspassage van *De Metafysica* van Aristoteles. Daarin stelt hij dat alle mensen van nature streven naar weten en dat de mens het meest gehecht is aan het “zien” omdat we daarvan het meeste leren. De klassieke tijd wordt dus gekarakteriseerd door een hang naar concreetheid, naar het zintuiglijk aanschouwelijke, naar het eindige, naar het begrensde en naar de vaste vorm. In genoemd werk ontwikkeld Aristoteles dan ook een specifieke ‘vormen’-metafysica. Iets “is”, iets bestaat pas, doordat en omdat het een eindige afgeronde concrete vorm heeft. Het onbepaald vormloze, zoals volgens hem bijvoorbeeld het

actueel oneindige, kan dan ook eenvoudigweg niet bestaan. Het vormloze staat anders gezegd gelijk aan het niets. Daarnaast is de klassieke oerziel gericht op “zijn” in plaats van op worden en op het in stand willen houden van een vaste natuurlijke orde in plaats van het voortdurend willen overschrijden van natuurlijk gegeven grenzen. Men heeft een sterke voorkeur voor het statische boven het dynamische en voor het discrete boven het continue.

Het oersymbool van de cultuurziel van het Avondland is daarentegen de abstracte oneindige, onmetelijke en onbegrensde ruimte. De Westerse cultuur is faustisch. Ze wordt gekenmerkt door het faustische streven naar oneindigheid en onmetelijkheid. Wat haar beziel is een enorme expansiedrift in ruimte en tijd. En dit ondanks dat deze abstracte oneindige ruimten haar ook een bepaalde angst kunnen inboezemen, zoals Pascal opmerkt in zijn *Gedachten*. De Westerse cultuur is steeds gericht op het abstracte, oneindige en onbegrensde. Men zoekt het vormloze en het onbepaalde. Ze wil in eerste instantie het *intelligibele* en niet het zintuiglijk waarneembare. Men wil “worden” in plaats van zijn. Het gaat voortdurend om het willen overschrijden van grenzen in plaats van om de gegeven natuurlijke orde in stand te houden. Ze heeft dan ook een sterke voorkeur voor het dynamische boven het statische en voor het continue boven het discrete.

Deze twee verschillende cultuurzielen leveren volgens Spengler twee volstrekt verschillende soorten wiskunde op. Eudoxis, Archimedes en Euclides waren wezenlijk andere wiskundigen dan Descartes, Leibniz en Newton, en later Euler, Lagrange, Poincare en Gauss.

Uitgaande van haar oerziel wordt de apollinische antieke wiskunde gekenmerkt door de volgende aspecten. In de eerste plaats zijn getallen concrete meeteenheden voor het meten van de afmetingen en het volume van eindige voorwerpen die elk een welbepaalde en vaste vorm hebben. Daarnaast wordt de natuur gekenmerkt door volkomen harmonieuze onderling vergelijkbare verhoudingen. Al het waarneembare is anders gezegd ten opzichte van elkaar meetkundig *commensurabel*. Daarom erkent de apollinische wiskunde alléén gehele getallen en getallen die te schrijven zijn als verhouding van twee gehele getallen (i.e., breuken). Alleen deze getallen representeren immers een harmonieuze maat. Het getal nul, negatieve getallen en irrationale getallen werden onverbiddelijk afgewezen omdat ze niet passen in de door hen veronderstelde harmonieuze orde van de natuur. Dergelijke getallen corresponderen niet met een eindige commensurabele vorm. Ze werden daarom tegennatuurlijk gevonden. Bekend is dan ook de legende uit de klassieke tijd dat de man die op een gegeven moment inzag dat de wortel van twee niet als breuk te schrijven is - en zo de irrationale getallen ontdekte - deze ontdekking vervolgens met de dood moest bekopen door op zee schipbreuk te leiden.

Ten derde erkende de Griekse wiskunde geen actuele oneindigheden. Uitsluitend potentiële oneindigheden werden erkend. Actuele oneindigheden werden naar hun wezen verondersteld

onbepaald en vormloos te zijn en dus onmogelijk te kunnen bestaan. Precies om deze reden wees men oneindig convergente rekenkundige reeksen – zoals de reeks $1/2+1/4+1/8+\dots$ met als limietsom het getal 1 – resoluut af. Een wiskunde van de limieten van dergelijke reeksen kwam dan ook niet van de grond. Ook werd om dezelfde reden het bestaan van een oneindig continuüm afgewezen. Want zo'n continuüm zou een actueel oneindig impliceren. En omdat actuele oneindigheden ontkend werden, werkte men nooit met oneindige verzamelingen van objecten, zoals de oneindige verzameling van alle driehoeken. De aandacht richtte zich louter op één enkel concreet object, zoals een bepaalde driehoek die in de aanschouwing is gegeven. Iedere verdergaande abstractie werd geschuwd. In de vierde plaats was ook de wiskundige bewijsvoering altijd concreet en aanschouwelijk. Bewijsvoering diende plaats te vinden op grond van zintuiglijk waarneembare en uitvoerbare constructies en nooit op grond van een onthechte abstracte formele afleiding. Tenslotte maakte men om deze reden nooit gebruik van abstracte variabelen. Vanuit hun gerichtheid op het “statische” kende men meer in het algemeen géén dynamische wiskundige concepten zoals het moderne functiebegrip. Functies beelden de ene collectie entiteiten af op een andere en zijn dus te formeel en te dynamisch.

Uitgaande van haar oerziel wordt daarentegen de grensverleggende faustische wiskunde van het Avondland gekenmerkt door de volgende aspecten. Getallen worden geheel formeel en abstract begrepen als functies of als verzamelingen van verzamelingen. Het getal ‘drie’ wordt bijvoorbeeld strikt formeel gedefinieerd als de collectie van alle verzamelingen die in een één-op-één correspondentie te brengen zijn met de verzameling $\{a, b, c\}$. Zo ontstaat een zuiver abstract en onthecht getalbegrip. De faustische wiskunde richt zich vanuit haar drang tot expansie en grensoverschrijding vervolgens op het ontwikkelen van zoveel mogelijk nieuwe soorten abstracte getallen. Naast het getal nul, de negatieve en de irrationale getallen kan hierbij gedacht worden aan complexe getallen, quaternionen, transcendentale getallen, kardinaalgetallen, ordinaalgetallen en infinitesimalen. De hechte band met de concreet gegeven empirisch waarneembare werkelijkheid die voor de Griekse wiskunde heilig was, wordt dus volledig losgelaten, ook al bleken later verrassend veel van deze nieuwe abstracte getallen zeer concrete toepassingen te hebben in de technische wetenschappen. Veel moderne technologische ontdekkingen zijn zonder deze nieuwe abstracte getallen zelfs onmogelijk.

In de tweede plaats erkent men volop het bestaan van actuele oneindigheden. Sterker nog, de wiskundige Cantor introduceerde een abstracte verzamelingenleer waarmee oneindig veel soorten oneindigheden ontsloten werden. Het aantal verschillende soorten oneindigheden bleek hierbij zelfs zo groot dat er niet aftelbaar maar zelfs *overaftelbaar* veel verschillende soorten oneindigheden zijn. De Duitse wiskundige Hilbert merkte na Cantors ontdekking dan ook op dat de moderne wiskunde zich nooit meer uit het door Cantor ontsloten paradijs zou laten verdrijven. In het verlengde hiervan begonnen de wiskundigen van het Avondland te

werken met willekeurige oneindige verzamelingen van objecten in plaats van met één enkel object dat ons in de zintuiglijke aanschouwing gegeven is. Dit leidde tot een stormvloed aan nieuwe wiskundige ontdekkingen.

Ten derde werd wiskundige bewijsvoering volstrekt formeel en abstract. Ook in dit opzicht verbrak men dus de oude band met de concrete zintuiglijk waarneembare werkelijkheid. We kunnen hierbij denken aan de louter abstracte algebra en het inzetten van de zuiver formele rekenmethodes van de door Newton en Leibniz ontdekte integraal en differentiaalrekening. Daarnaast introduceerde men vanuit haar gerichtheid op het dynamische in tegenstelling tot het statische formele variabelen en abstracte functies. Het moderne functiebegrip had in de Oudheid dan ook nooit tot ontwikkeling kunnen komen. Tenslotte denkt men niet langer na over begrensde en eindige meetkundige figuren. De aandacht wordt volledig verlegd naar het analyseren van oneindige ruimten en abstracte oneindige structuren zonder directe concrete wetenschappelijke toepassingen. Dit resulteerde in een heel universum van nieuwe oneindige ruimten, zoals niet-Euclidische -, metrische -, Sobolev -, Banach - en Lebesgue ruimten. Eveneens ontstonden allerlei nieuwe oneindige wiskundige structuren, zoals de structuren van de mathematische groepen -, Galois -, en categorieëentheorie.

Deze abstracte Westerse wiskunde zou door de concrete apollinische antieke cultuur gezien worden als een ernstige, ja zelfs perverse, ontaarding en ontkenning van het primaat van de harmonische natuurlijke orde. Men zou het hebben afgedaan als onthecht, onnatuurlijk, niet reëel en illusoir. Dit *pathos* van de Griekse cultuurziel heeft er echter wel voor gezorgd dat zij zich nooit zo sterk expansief heeft kunnen ontwikkelen als in het Avondland. Vele belangrijke paradoxen, zoals die van Zeno, zijn voor de Griekse wiskunde altijd onoplosbaar gebleven. En dit precies omdat zij de faustische wiskundige concepten die nodig zijn voor het oplossen ervan – zoals in dit geval oneindig convergente reeksen – nooit heeft kunnen overwegen en aannemen. De mensheid moest na de Griekse Oudheid dan ook nog vele eeuwen wachten voordat de wiskunde van het Avondland deze en andere problemen eindelijk zou oplossen.