De kleine *Logicomix*

Emanuel Rutten

In 2009 verscheen de Nederlandse vertaling van de prachtige beeldroman *Logicomix* van Apostolos Doxiadis en Christos Papadimitriou. De auteurs zijn erin geslaagd om op zeer aansprekende wijze het boeiende verhaal te vertellen van de laat negentiende en vroeg twintigste eeuwse zoektocht naar de fundamenten van de wiskunde. Deze epische en welhaast spirituele zoektocht naar absolute zekerheid en waarheid wordt verteld door de ogen van Bertrand Russell. Russell was zelf één van de belangrijkste denkers die zich met deze zoektocht heeft beziggehouden. Andere belangrijke personages in dit verhaal zijn Gottlob Frege, Ludwig Wittgenstein, Alfred Whitehead, David Hilbert en Kurt Gödel. Zij bouwden allen voort op werk van voorgangers. Vooral Aristoteles, Leibniz en George Boole zijn voor de zoektocht van groot belang geweest. Alle grote denkbeelden in wat later "de analytische filosofie" zou gaan heten zijn tijdens of als gevolg van de zoektocht van Frege, Russell, Wittgenstein en anderen ontstaan.

Hieronder zal ik slechts op hoofdlijnen de belangrijkste momenten van deze fascinerende zoektocht naar absolute zekerheid weergeven. Ik beperk mij hierbij tot het logisch-filosofische deel. In *Logicomix* wordt eveneens veel aandacht besteed aan de persoonlijkheid, karakterontwikkeling en levensloop van de diverse personages. Daarnaast wordt de zoektocht steeds in een historische context geplaatst, zoals die van de beide wereldoorlogen. Op dit alles ga ik dus niet in. Daarvoor dient *Logicomix* zelf gelezen te worden. Daartoe aanzetten is echter precies wat ik beoog. Ik hou hetzelfde vertelperspectief aan als *Logicomix*. We bekijken de zoektocht naar de fundamenten van de wiskunde dus steeds vanuit Russell. Verder sluit ik bewust steeds zo dicht mogelijk aan bij de heldere formuleringen van *Logicomix* zelf.

Russell maakte in zijn jonge jaren kennis met de meetkunde van Euclides. Hij raakte diep gefascineerd door de manier waarop Euclides in *De Elementen* allerlei meetkundige stellingen stap voor stap logisch noodzakelijk bewees uit slechts enkele zelfevidente axioma's. Deze methode van het streng afleiden van conclusies uit eerste principes had Euclides ontleend aan Aristoteles. Zo kan met het parallellen axioma van Euclides heel eenvoudig bewezen worden dat de som van de hoeken van een driehoek twee rechte hoeken is. Hier vond Russell wat hij tevergeefs had gezocht. Meetkundige bewijsvoering toonde hem de enige weg tot de werkelijkheid: de rede. Hij kwam voor het eerst in aanraking met de heerlijke ervaring iets te weten met absolute zekerheid. En zo werd logische bewijsvoering zijn weg naar de waarheid.

Zijn wereldbeeld veranderde. Hij leerde van zijn leraar wiskunde indertijd dat betrouwbare kennis alleen verkregen kan worden door de harde wetenschappen en dat de harde wetenschappen, zoals vooral de natuurkunde, allemaal zijn gebaseerd op wiskunde. Wetenschap zal uiteindelijk alles kunnen verklaren en is onze enige hoop, hield zijn leraar hem voor.

Toen begon hij in te zien dat we de axioma's van de wiskunde, zoals die van Euclides, gewoon moeten aannemen. Deze axioma's worden zelf niet verder bewezen. Dit stelde Russell teleur. Hem was verteld dat we in de wiskunde *alles* moeten bewijzen wat we zeggen. Wat is echter de waarde van bewijs als het berust op iets wat onbewezen is? Zelfs in de wiskunde moeten we in de bewijsvoering op een bepaald moment gewoon sommige dingen aannemen. Zijn teleurstelling was echter een vonk voor de rest van zijn leven. Hij wilde wiskundige worden en ging op Cambridge wiskunde studeren.

Zijn kennismaking met de 'koningin der wetenschappen' was echter opnieuw een grote teleurstelling. In de wiskunde van zijn tijd werden veel begrippen niet scherp gedefinieerd. Er werd zelfs gewerkt met vage begrippen zoals 'oneindig klein'. De op Newtons calculus teruggaande wiskunde waarmee Russell geconfronteerd werd was veel minder gedisciplineerd dan de strenge axiomatische meetkunde van *De Elementen* van Euclides. Russell vond dat er ronduit slordig gedacht werd in de wiskunde. Wat hij vond waren rekentrucs in plaats van een strenge methode om tot zekere, absolute kennis te komen. Niemand sprak op Cambridge over de echte vragen van de wiskunde; over de aard van wiskundige waarheid en hoe we die kunnen kennen. Wiskundigen hebben in tegenstelling tot filosofen geen enkele passie voor de waarheid, vond hij. Hij vormde de rotsvaste overtuiging dat de fundamenten van de wiskunde rot zijn, dat het bouwwerk van de wiskunde op instorten staat, en besloot filosofie te gaan studeren. Ook dat leverde aanvankelijk een teleurstelling op. Wiskundigen proberen in ieder geval elkaar niet tegen te spreken. Maar filosofen zijn het onderling totaal niet eens. Plato stelt dat wat je ziet slechts een slechte kopie is van de ware werkelijkheid, terwijl voor Aristoteles de basis ligt in wat hij waarneemt. Volgens Descartes bestaat er een tegenstelling tussen geest en materie, terwijl Spinoza dit ontkent. En zo gaat het maar door. Met zijn vriend Moore zocht hij verlichting bij een op dat moment populaire Hegeliaan. Maar daarin vond hij evenmin iets. Hij zocht een methode om werkelijk iets van kennis te verwerven.

Moore vertelde Russell dat in een bepaald opzicht de filosofie ook een Euclides heeft. Leibniz wilde ooit het denken zelf net zo helder maken als de meetkunde van Euclides door alle begrippen terug te voeren op een eindig aantal fundamentele begrippen en deze in een precieze logische taal met bijbehorende calculus onder te brengen. Wanneer er dan onenigheid ontstaat hoeven we alleen maar te zeggen: Laat ons berekenen! Leibniz baseerde zich hierbij op de logica van Aristoteles.

Dit ambitieuze project van het ontwerpen van een puur logische calculus werd in de tweede helft van de negentiende eeuw voortgezet door George Boole met zijn *De wetten van het denken* uit 1854. Net zoals Leibniz ontwierp Boole een formele symbolische taal waarmee we door te combineren van wat we al weten kunnen afleiden wat we nog niet weten. Boole wilde logica zo helder maken als algebra.

Russell vroeg zich af waarom hij dit niet wist. Dit komt volgens Moore omdat filosofen denken dat het wiskunde is en wiskundigen dat het filosofie is. Hij liet Russell kennismaken met een nieuwe, bijzondere wereld. Vanaf dat moment wist Russell wat hij wilde worden: logicus. Aristoteles definieert logica als 'nieuw en noodzakelijk redeneren'. Door het toepassen van logische regels leidt je uit een verzameling uitgangspunten of premissen een nieuwe conclusie af die onontkoombaar is. Russell stortte zich op de logica van Aristoteles en het werk van Boole. Meer logica was er in zijn tijd op dat moment namelijk niet.

Ook de logica bleek echter niet aan zijn behoefte te voldoen. Russell wilde absoluut zekere kennis over de wereld vergaren. Kennis die volgens hem alleen de wetenschap kan leveren. Wetenschap vertrouwt echter op wiskunde en wiskunde was vol onbewezen aannamen en slechts gedefinieerde begrippen. Het was een chaos. Om de wiskunde te redden was een sterke logica nodig. Maar die was er niet. De logica van Aristoteles en Boole was niet sterk genoeg. De wiskunde, ooit geroemd om haar absolute zekerheid, steunde dus op wankele fundamenten. Er was sprake van een impasse. En het ergste was nog wel dat de wiskundigen het probleem zelf niet onder ogen zagen. Ze bleken zich pijnlijk onbewust van het wankele fundament. Russell nam zich voor te gaan bouwen aan het huis van de wiskunde. In die tijd leerde hij op Cambridge Alfred Whitehead kennen. Hij was volgens Russell verfrissend grondig in zijn benadering. Om in de wiskunde zekerheid te krijgen, zo stelde Whitehead, moeten we haar meest basale basisaannamen opnieuw gaan onderzoeken door bij het begin te beginnen. In Whitehead trof hij een sterke verwante geest en mentor. Whitehead vertelde Russell dat er wel mensen zijn die een helder beeld hebben van de situatie. Deze bevinden zich echter allemaal op het continent, zoals Gottlob Frege in Duitsland. Frege had na Boole in zijn *Begriffsschrift* uit 1879 een nieuwe logica ontwikkeld. Dit geschrift volgt net zoals Boole het steven van Leibniz naar een volledige logische taal. Door de gezonde delen van de wiskunde te combineren met de conceptuele verfijningen van Frege's nieuwe logica kan een krachtige aanval ingezet worden, aldus Whitehead.

Frege wilde in de nieuwe logische taal die hij in zijn *Begriffsschrift* ontwikkeld had voor het beschrijven van de wereld de grondbeginselen van de wiskunde vastleggen. De logica van Aristoteles en Boole zijn daarvoor namelijk ontoereikend. Ze missen de vele malen rijkere uitdrukkingskracht van Frege's nieuwe logica. Zijn logica wordt de predikatenlogica genoemd en is in de logica toonaangevend geworden. Frege gebruikte naast zijn eigen logica ook de door Georg Cantor ontwikkelde verzamelingenleer om wiskunde te funderen op stevige logische uitgangspunten. Het definitieve resultaat van Frege's project verscheen in 1903 en luisterde naar de titel *Grundgesetze der Arithmetik*. De verzamelingenleer van Cantor speelde dus een zeer belangrijke rol in de nieuwe logische taal om de wiskunde van een stevig fundament te voorzien. Binnen de wiskunde was Cantors verzamelingenleer echter zeer controversieel. De wiskundige Henri Poincaré was een overtuigd belijder van het belang van menselijke intuïtie in de wiskunde. Hij beschouwde de verzamelingenleer van Cantor als een ziekte waarvan de wiskunde moet worden genezen. David Hilbert was daarentegen de man van het exacte logische bewijs in de wiskunde. Hij stelde dat niemand ons meer zal verdrijven uit het paradijs dat Cantor voor de wiskunde schiep.

Cantors verzamelingenleer gaat terug op het werk van de Tsjechische denker Bernard Bolzano. Vanaf het tijdperk van de Grieken hadden wiskundigen afzonderlijke objecten bekeken, zoals een getal of een meetkundige vorm. Maar in het midden van de negentiende eeuw begon Bolzano te kijken naar verzamelingen van objecten die gedefinieerd worden door een gemeenschappelijke eigenschap, zoals de verzameling van alle getallen groter dan 7, de verzameling van alle rechthoekige driehoeken, etc. Vanuit dit eenvoudige alledaagse idee ontwikkelde Cantor het majestueuze wonderlijke bouwwerk van de verzamelingenleer. Het was deze leer die tot zoveel conflicten leidden tussen wiskundigen. En wat de verzamelingenleer zo controversieel maakte was haar centrale positie in de zoektocht naar degelijke fundamenten voor de wiskunde. Poincaré verweet Hilbert dat hij (mede) door gebruik te maken van Cantors verzamelingenleer van de wiskunde een hersenloze machine wil maken die we axioma's kunnen voeren en waar dan aan de andere kant automatisch wiskundige stellingen uitrollen. Dit doet echter geen recht aan de rol van de intuïtie in de wiskunde die Poincaré zo belangrijk vond.

Genoemd conflict was tekenend voor de crisis waarin de wiskunde zich rond 1900 bevond. De laatste tweeduizend jaar, sinds Euclides, waren alle wiskundigen ervan uitgegaan dat de basisaxioma's van de wiskunde, vanzelfsprekend waren. Maar ineens was het woord “vanzelfsprekend” verdacht geworden. De komst van allerlei nieuwe niet-euclidische meetkundige theorieën binnen de wiskunde had het begrip van axioma’s als “vanzelfsprekende waarheden” onderuitgehaald. In feite was nu het hele begrip “vanzelfsprekend” van de baan. Dat is waarom Hilbert intuïtie geen plek meer wilde geven in wiskundige bewijzen. De nieuwe wiskunde diende niets meer aan te nemen als intuïtief vanzelfsprekend. Hilbert wilde niet langer wiskundige stellingen accepteren die niet met strenge rigoureuze bewijzen volledig zijn onderbouwd. De gehele wiskunde diende te worden gegrondvest op onwrikbare logische fundamenten. Men moest beginnen met het funderen van de elementaire rekenkunde in absolute onbetwijfelbare logische zekerheden, om zo de consistentie van de elementaire rekenkunde streng te bewijzen. Deze problemen waren volgens Hilbert oplosbaar omdat de wereld voor de rede volledig te begrijpen moet zijn. Als een vraag logisch precies gesteld kan worden, kan ze ook logisch beantwoord worden. In deze geest wilde Hilbert de nieuwe eeuw ingaan: “In onszelf horen we de roep: Dit is het probleem, zoek de oplossing. Want die kan gevonden worden! In onze wetenschap bestaat het kan niet gekend worden niet. In de wiskunde is er geen ignorabimus!”

In dit project kon Russell zich uiteraard, net zoals Frege, goed vinden. Het was zijn project. Russell begon te werken aan een boek dat alle fundamentele problemen zou moeten oplossen. Dit werd *The Principles of Mathematics* uit 1903. Hij bouwde voort op de basis die Frege gelegd had in zijn *Grundgesetze der Arithmetik*. Hierbij gebruikte hij een veel handigere door Peano bedachte schrijfwijze voor de door Frege in zijn *Begriffsschrift* ontwikkelde predikatenlogica. Russells wereld beperkte zich steeds meer tot het nadenken over de grondbeginselen. In die tijd ontstond een hechte vriendschap met Whitehead. Net zoals Frege maakte ook Russell gebruik van Cantors verzamelingenleer. Verzamelingen stonden aan de basis van alles, zelfs van de getallen. Want wat is ‘3’ anders dan de verzameling van alle verzamelingen met drie elementen? Op enig moment stuitte Russell echter op zijn beroemde Russell paradox. Als de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten een element is van zichzelf dan is hij op grond van zijn eigen definitie juist geen element van zichzelf. Dit kan dus niet. Maar als de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten geen element is van zichzelf dan is hij op grond van zijn eigen definitie juist wel een element van zichzelf. Dit kan dus ook niet. We stuiten daarom hoe dan ook op een tegenspraak. Deze paradox zette alles op zijn kop. Het door Bolzano geïntroduceerde begrip ‘verzameling’ als een groep gedefinieerd door een gezamenlijke eigenschap werd hard onderuit gehaald. Cantors verzamelingenleer was zoals we zagen hierop gebaseerd en bleek dus ook inconsistent. Cantors hele verzamelingenleer stortte met de ontdekking van Russells paradox in.

Poincaré reageerde positief. Hij zag in de paradox sterke argumenten tegen iedere poging om puur logische grondbeginselen te creëren voor de wiskunde. Zijn vaak herhaalde credo ‘logica is onvruchtbaar tenzij het bevrucht wordt door de intuïtie’ vond nu een volmaakte rechtvaardiging. In feite was de met Cantors verzamelingenleer aangevulde logica niet onvruchtbaar maar kweekte ze zelfs contradicties. In het pro-verzamelingenkamp heerste er echter verwarring en opschudding. Logici waren verpletterd. Hilbert hoopte op een uitweg. En Peano evenzeer. Frege begreep onmiddellijk dat zijn project gefaald had toen hij van Russells paradox hoorde. Ook Frege had zijn bouwwerk namelijk opgetrokken steunend op Bolzano’s eenvoudige idee van een verzameling als een door een gemeenschappelijk kenmerk bepaalde groep van objecten. Door Cantors verzamelingen in de logica op te nemen had hij het paard van Troje binnengehaald. Whitehead liet Russsell weten dat zijn paradox echt verwoestingen aanrichtte. Hij begon niet meer aan het tweede deel van zijn *Universal Algebra*. En Russell zelf gaf ook het tweede deel van zijn *Principles of Mathematics* op. Iedereen die werkte aan de fundamenten was weer terug bij af. Het probleem dat Russell blootlegde ging zo diep dat het hun beste instrument vernietigde. Russell bedacht op enig moment echter een manier om de paradox eventueel te omzeilen. Dit betreft zijn zogenaamde typen theorie. De idee is dat het wiskundig universum gelaagd is. Op het allerlaagste niveau hebben we de enkelvoudige objecten. Deze zijn van type 0. Daarboven hebben we de verzamelingen van deze objecten. Deze verzamelingen zijn van type 1. Weer een niveau hoger hebben we verzamelingen van verzamelingen van type 1. Deze zijn van type 2. Zo ontstaat een hiërarchische gestratificeerde structuur van verschillende niveaus. Russells idee was nu om als extra axioma in te voeren dat een verzameling van een bepaald type alléén elementen mag bevatten van één niveau lager. Verzamelingen van type 1 mogen dus alléén enkelvoudige objecten bevatten. Verzamelingen van type 2 mogen alléén elementen bevatten van type 1, die van type 3 alleen die van type 2, enzovoort. Op deze manier wordt de paradox voorkomen omdat de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten in het systeem niet meer voorkomt. Deze verzameling voldoet immers niet aan genoemd axioma. Whitehead en Russell besloten om hun krachten te bundelen en samen een nieuw boek te schrijven. Dit werd de *Principia Mathematica*. Men wilde de verzamelingenleer van Cantor transformeren met behulp van Russells typen theorie om van daaruit de hele wiskunde weer op te bouwen. Hiertoe wilde ze eerst Russells typen theorie verbeteren. De gehele bewijsgrond moest op deze verbeterde typen, de zogenaamde 'vertakte' in plaats van 'eenvoudige' typen, gaan rusten. De problemen waren echter erg groot. De typen bleken erg kunstmatig. Ze waren anders gezegd niet universeel genoeg. Na veel arbeid kwam het boek uiteindelijk tot stand. Men had een deel van de wiskunde gegrondvest op een handvol zeer elementaire axioma's. Vanuit deze degelijke fundamenten kon men allerlei wiskundige stellingen afleiden. Dit leidde echter wel tot zeer complexe bewijzen. Zo had men soms honderden bladzijden nodig om zelfs maar de meest eenvoudige rekenkundige uitspraken over getallen te bewijzen. Dat is de prijs die men wilde betalen om iets echt zeker te weten. De *Principia Mathematica* verscheen in 1910. Het was een monumentaal werk geworden. Om de wiskunde met echt absolute zekerheid te funderen moet zij op logica gebaseerd zijn. Aanvankelijk dacht men dat Frege's predikatenlogica tezamen met Cantors verzamelingenleer hiervoor geschikt zou zijn, totdat Russell zijn paradox in Cantors verzamelingenleer ontdekte. De *Principia* betreft het reusachtige herstelwerk dat Russell en Whitehead jarenlang samen hebben verricht om de wiskunde alsnog te kunnen grondvesten op een logica zonder paradoxen. Dit keer betrof die logica echter Frege's predikatenlogica aangevuld met Russells vertakte typen theorie. Zo dichtte Russell na jaren het gat dat hij zelf had blootgelegd. Russell was zelf echter nooit echt tevreden over het resultaat. De *Principia* had hun weg naar het paradijs moeten zijn, maar omdat de fundamenten volgens Russell alsnog niet stevig genoeg waren, mist het een voldoende stevige bodem en bleek het slechts een adequaat onderzoek van de hel. De premissen van de typentheorie waren uiteindelijk moeilijk te verteren, ook al vormden ze de bescherming tegen Russells paradox. De honderden pagina's met symbolische berekeningen hadden al met al volgens velen de fundamenten niet veel minder wankel gemaakt.

Het boek was verder zo enorm omvangrijk, massief en dicht aan logische formules dat de uitgever niemand kon vinden om het te beoordelen. Dus dachten ze dat als niemand de *Principia* wil lezen als hij ervoor betaald wordt, zeker ook niemand ervoor zal willen betalen om het te lezen. Op de gedachtegang van de uitgever viel weinig aan te merken. Maar omdat Russell en Whitehead vonden dat de *Principia* algemeen toegankelijk moest zijn, besloten ze de schande te aanvaarden en te betalen om publicatie van hun werk mogelijk te maken. De *Principia* was Russells uitgestrekte hand naar de wereld. Er is slechts één persoon waarvan Russell zeker weet dat hij de ongeveer duizend pagina's ontoegankelijke tekst, propvol symbolen, van voor tot achter heeft gelezen. Die persoon was niemand minder dan Kurt Gödel over wie we nog zullen spreken.

In de periode na de publicatie van zijn magnum opus ontmoette Russell op Cambridge de jonge student Ludwig Wittgenstein. Hij had van Frege het advies gekregen om bij Russell logica te gaan studeren. Al direct vanaf het begin maakte Wittgenstein indruk op Russell vanwege de intensiteit van zijn filosofische overtuigingen. Wittgenstein meende dat we alleen de resultaten van logische bewerkingen zeker kunnen weten. Wat slechts empirisch is, hoort volgens Wittgenstein niet thuis in een verhandeling over de waarheid. Hij was zeer onder de indruk van de *Principia*.

Wittgenstein kon zich echter niet vinden in het gebruik van de verzamelingenleer voor het formele bouwwerk van de *Principia*. Volgens Russell en Whitehead was de verzamelingentheorie essentieel voor de bewijsvoering van de *Principia*. Wittgenstein moest echter niets van verzamelingen hebben. Hilbert noemde het een paradijs, maar volgens Wittgenstein was het een hel. Door de poorten van deze hel sluipt het monster van de oneindigheid de wiskunde binnen. Nu hadden Russell en Whitehead geen probleem met oneindigheid. Oneindigheid is er gewoon in het conceptuele universum, nog voordat wij er over beginnen na te denken. De wiskundige werkelijkheid kent namelijk een onafhankelijk bestaan. Zij bestaat los van ons menselijke denken erover. Wittgenstein is het hier volstrekt mee oneens: "Waar zit die oneindigheid van jullie? Waar? Ze past niet in een eindig boek!" Er bestaat volgens Wittgenstein geen objectieve van ons onafhankelijke werkelijkheid van wiskundige objecten zoals verzamelingen, getallen of wat dan ook.

Na kort filosofie bij Russell te hebben gestudeerd, vertrok Wittgenstein naar Noorwegen om daar na te denken over de betekenis van proposities en alternatieven voor Russells typentheorie. Nog wat later nam Wittgenstein dienst in het keizerlijke Oostenrijks-Hongaarse leger. Hij bleef echter nadenken over de betekenis van proposities. Het waren speelgoedmodellen die hem zijn eerste grote idee bezorgden. Elk voorwerp in de werkelijkheid wordt weergegeven door een naam. En deze namen combineren in volzinnen overeenkomstig de manier waarop de door deze namen aangeduide voorwerpen in de wereld combinaties aangaan. Taal is dus slechts een model. Het is een afbeelding van de werkelijkheid. En de betekenis van de wereld zelf ligt niet besloten in de wereld. In 1921 publiceerde hij zijn *Tractatus* waarin hij beweerde dat hij alle problemen van de filosofie voorgoed had opgelost.

Wat Russell aanzette tot zijn zoektocht naar absolute zekerheid was een diep wantrouwen jegens de gewone alledaagse taal. Net als Frege zag hij die als een vervorming van de pure gedachte. En dus wilde hij haar vervangen door een logisch volmaakte versie. Maar in zijn intense kritiek op de *Principia* stelde Wittgenstein precies die substitutie ter discussie. Wittgenstein gebruikte weer de gewone natuurlijke taal. De wereld wordt gemodelleerd door taal. Dat is de strekking van zijn beeldtheorie. Zoals een speelgoedkanon een model is voor het echte, zo is het woord ‘Kanon’ dat ook. En de zin ‘Het kanon vuurde op de vijand’ beeldt de situatie in de echte wereld af.

In 1919 ontmoetten Russell en Wittgenstein elkaar weer. Een week lang spendeerden ze ieder moment van de dag om werkelijk elk detail van de *Tractatus* door te nemen. Russell meende dat de beeldtheorie helder genoeg is, maar dat ze ons alleen waarheid verschaft dankzij de onderliggende hogere taal van de logica. Wittgenstein meende echter nu juist dat er niet zoiets bestaat als een hogere taal. Er is maar één taal en dat is de natuurlijke taal. Deze taal is alles wat we nodig hebben om alle feiten van de wereld te beschrijven. Logica is slechts de vorm van de taal die erin ingebed ligt als een ijzeren structuur die een gebouw zijn steun geeft. Maar probeer maar eens in die ijzeren structuur te leven. Niemand kan dat.

Wittgenstein stelde dat Russells falen om fundamenten te scheppen verklaarbaar is door de aard ervan. Je kunt niet praten over logica. Logica kun je alleen laten zien. Het is waanzin om aan de logica (en ook de wiskunde) een onafhankelijk bestaan toe te schrijven. Dat is wat monsters voortbrengt, zoals die zogenaamde oneindigheid en de tot Russells paradox leidende verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten. We hebben echter helemaal geen verzamelingen nodig. Beweringen doen over oneindigheid is net zo leeg als beweringen doen over het universum. Je kunt wel zeggen dat er drie blaadjes bestaan aan deze boom, maar niet dat er drie blaadjes bestaan in het universum. De logica staat dat niet toe omdat we geen beeld hebben van het universum. De paradoxen hadden Russell dan ook moeten waarschuwen. De logica is leeg. Ze kan geen werkelijkheid spreken. Als je probeert lege vorm iets over inhoud te laten zeggen krijg je nonsens. De logica produceert slechts tautologieën, zoals “Morgen zal het sneeuwen of niet sneeuwen”. Ze vertelt ons niets over de werkelijkheid. De *Tractatus* bakent taal af, en daarmee ook het denken. Maar waar het echt om gaat is hoe te leven. En daarover kunnen we niet spreken. Alle feiten in de wereld zijn niet genoeg om de betekenis van de wereld zelf te begrijpen. Daarvoor moet je je buiten de wereld plaatsen.

Wittgensteins *Tractatus* werd steeds invloedrijker. Russells oude vriend Moore, die hem in de logica had geïntroduceerd, stelde dat het boek van Wittgenstein zich bezighoudt met de problemen van de logica en deze oplost. Volgens Wittgenstein hebben van Aristoteles tot Russell logici ingewikkelde manieren bedacht om steeds hetzelfde te zeggen in andere woorden: tautologieën. Twintig jaar lang had Russell geploeterd om het bestaan te rechtvaardigen van een machine die tautologieën produceert. Logica is lege vorm en gaat niet over de diepste algemene structuren van de werkelijkheid, zoals Russell meende.

De verschillen van inzicht tussen Russell en zijn leerling Wittgenstein over de aard van de logica en de wiskunde waren dan ook immens. Voor Russell is de logica een wetenschap die ons inzicht verschaft in de ware dieptestructuur van de werkelijkheid. Logica gaat dus over de wereld net zoals bijvoorbeeld de biologie, de geologie of de zoölogie. Het grote verschil met alle andere wetenschappen is echter dat de logica zich richt op de meest abstracte en de meest algemene eigenschappen van de werkelijkheid. Door logica leren we de fundamentele grondstructuur van de wereld kennen. Logica is zo voor Russell de weg tot zekere onbetwijfelbare waarheden over het wezen van de werkelijkheid. Bij Russell treffen we dus een rijke substantiële logica ofwel een logica vol inhoud. Zo behoort het nadenken over oneindigheid en de studie van de eigenschappen van verzamelingen tot het domein van de logica. Logica omvat volgens Russell zelfs de hele wiskunde. Logica is zo vol van inhoud dat alle wiskundige waarheden vanuit enkele zuiver logische inzichten bewijsbaar moeten zijn. Dit verklaart ook zijn streven om de felbegeerde zekere fundamentele grondslagen van de wiskunde uitsluitend te zoeken in de logica. Russell meent dat alle logisch-mathematische objecten onafhankelijk van de mens bestaan. Getallen, meetkundige figuren en verzamelingen bestaan "echt". Ze bestaan als onveranderlijke eeuwige objecten buiten het menselijke denken. Deze abstracte objecten zijn de waarheidsmakers van ware logisch-mathematische uitspraken, net zoals Jans blauwe fiets de waarheidsmaker is van de uitspraak 'De fiets van Jan is blauw'.

Zijn leerling Wittgenstein is het met al deze opvattingen volstrekt oneens. Volgens hem betreft de logica niets meer dan de vorm van onze taal. Logica heeft geen enkele inhoud. Precies daarom kan er door ons ook niet over logica gesproken worden. Logica *toont* zich slechts als de vorm van onze taaluitingen. Op zichzelf beschouwd zijn logische uitspraken volstrekt inhoudsloze tautologieën. Niet voor niets meent Wittgenstein dat logische objecten niet los van de mens bestaan. Logica betreft slechts de lege vorm van onze taaluitingen en kent daarom geen onafhankelijk bestaan buiten de mens. Er ontstaan volgens hem dan ook onoplosbare paradoxen zodra we, zoals Russell, toch inhoud proberen te geven aan de logica en er vervolgens over proberen te spreken alsof het om zelfstandige objecten buiten onze geest zou gaan. Het willen verzelfstandigen van logische en wiskundige objecten is in strijd met de aard van de logica zelf en levert diepe problemen op, zoals dus de beroemde paradox van Russell. De ontmoeting na de oorlog tussen beide heren legde dan ook grote en onoverbrugbare verschillen bloot. Na 1919 ging men uiteen.

Een groep visionairs in Wenen – De Wiener Kreis - had tijdens het interbellum een manifest opgesteld waarin gepleit werd voor een strikt wetenschappelijke beschouwing van de wereld. Dit was een project waarin de werktuigen van de logica, de wiskunde en de natuurwetenschappen werden gecombineerd. Men roemde onder andere Russell die volgens hen de basis had gelegd voor een logische taal en aldus een wetenschappelijk wereldbeeld mogelijk heeft gemaakt. Russell was met zijn pionierswerk een bron van inspiratie geweest voor de Weense kring. Maar men had eveneens grote bewondering voor denkers als Frege en Wittgenstein. Voor de leden van de Weense kring was Wittgenstein zelfs een legende.

Een van de leden van de Weense kring was de jonge Kurt Gödel. Gödel had de *Principia* volledig gelezen voor zijn eigen onderzoek in de logica. Nergens in dat grote werk vond hij echter een heldere uitleg van de meest wezenlijke aanname, namelijk dat de waarheid of onwaarheid van iedere logische propositie in principe bewezen kan worden. Dat al het ware bewijsbaar is blijft in de *Principia* een onbewezen en verzwegen vooronderstelling. Het is een aanname die ook al tot uitdrukking kwam in Hilberts uitspraak dat er in de wiskunde geen ignorabimus is. Als een wiskundige vraag helder geformuleerd kan worden, dan moet deze ook door strenge wiskundige bewijsvoering te beantwoorden zijn. Gödel stelde dat dit cruciale uitgangspunt zelf eveneens bewezen moet kunnen worden om de wiskunde echt te kunnen bouwen op absolute zekerheid.

Zonder het monnikenwerk van de *Principia* had Gödel zijn vraag niet kunnen stellen. Het antwoord op zijn vraag kreeg Gödel echter niet van Russell of iemand anders. Daarom begon hij zijn eigen zoektocht om zijn vraag te beantwoorden. Hierbij richtte hij zich op wat inmiddels bekend was komen te staan als het programma van Hilbert. In 1900 had Hilbert nog opgeroepen om te bewijzen dat de rekenkunde consistent is. Inmiddels waren zijn ambities echter flink toegenomen. Het doel van Hilberts programma was om een formeel systeem te ontwikkelen voor de wiskunde (i) dat volledig is oftewel waarmee alle wiskundige waarheden bewijsbaar zijn, (ii) dat zijn eigen consistentie kan bewijzen, en (iii) waarvoor een algoritme bestaat waarmee in een eindig aantal stappen netjes bepaald kan worden of een gegeven wiskundige formule in het systeem bewijsbaar is. De axioma's van dit systeem hoefden overigens niet langer zuiver logisch van aard te zijn. Inmiddels was namelijk dankzij het werk van Russell en Whitehead duidelijk geworden dat het funderen van de gehele wiskunde op louter logische axioma's onbegonnen werk was. Russell en Whitehead hadden in hun *Principia* naast logische axioma's namelijk onvermijdelijk ook axioma's nodig die buiten het domein van de logica vallen. Een voorbeeld daarvan is het axioma dat er oneindig veel objecten zijn. Dit is geen strikt logisch axioma maar eerder een empirisch axioma.

Gödel bewees tenslotte in zijn paper *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* uit 1931 dat de rekenkunde (en dus de hele wiskunde) onvolledig is. In geen enkel consistent formeel systeem dat rijk genoeg is om de rekenkunde te omvatten kunnen alle rekenkundige waarheden worden bewezen. Er zullen dus altijd onbewijsbare rekenkundige (en daarmee wiskundige) waarheden zijn. Hilberts programma kan dan ook niet succesvol voltooid worden. Zijn gezochte formele systeem bestaat niet. Ook bewees Gödel dat elk consistent formeel systeem dat rijk genoeg is om de rekenkunde te omvatten zijn eigen consistentie niet kan bewijzen. De vraag naar genoemd algoritme in (iii) beantwoordde Gödel echter niet. Dit zou later gedaan worden door anderen, waaronder Alan Turing.

Het bewijs van Gödel voor de onvolledigheid van de rekenkunde is gebaseerd op een variant van de bekende paradox dat de zin "Deze zin is onwaar" niet waar en ook niet onwaar kan zijn. Want als hij waar is dan is hij onwaar en als hij onwaar is dan is hij waar. Gödel bekeek echter de zin "Deze zin is niet bewijsbaar" en wist deze op ingenieuze wijze in het hart van de rekenkunde zelf te plaatsen door hem met behoud van betekenis op briljante wijze te vervangen door een complexe uitspraak over getallen. Nu zijn er twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is dat "Deze zin is niet bewijsbaar" onwaar is. In dat geval is deze zin dus bewijsbaar en onwaar. Er zit dan in de rekenkunde een bewijsbare onwaarheid zodat de rekenkunde inconsistent is. De tweede mogelijkheid is dat "Deze zin is niet bewijsbaar" waar is. In dat geval is deze zin dus waar en onbewijsbaar. Maar dan zit er in de rekenkunde een onbewijsbare waarheid. Kortom, de rekenkunde is ofwel inconsistent ofwel onvolledig. Als de rekenkunde consistent is dan is zij dus onvolledig. En zo volgt inderdaad dat ieder consistent formeel systeem dat rijk genoeg is om de rekenkunde te omvatten onvolledig is. Er zullen altijd onbewijsbare wiskundige waarheden zijn.

Gödels ontdekking betekende het einde van de zoektocht naar de absolute fundamenten. Het was over. Voor velen betekende Gödels onvolledigheidstheorema het definitieve einde van een droom. De bodem was onder de voeten van de dromers weggeslagen. Hilbert was gebroken. En hij niet alleen.

En alsof Gödels bewijs nog niet erg genoeg was, kregen Russells Weense bewonderaars een nieuwe klap te verwerken. Het manifest van de Weense kring was volgens haar leden geschreven in de geest van de *Tractatus*. Men kon zich vooral vinden in de allerlaatste zin ervan: "Waarover we niet kunnen spreken daarover moeten we zwijgen." Het werk van Wittgenstein gaf hen volgens henzelf de mogelijkheid om religie, metafysica, ethiek, etc. totaal te verbannen uit het rationele gesprek. Want waarover niet logisch gesproken kan worden is letterlijk onzin. Wittgenstein liet hen in een ontmoeting echter weten dat de betekenis van zijn werk hen totaal ontgaan was. Zijn punt is precies het tegenovergestelde. De dingen waarover niet logisch kan worden gesproken zijn de enige die er echt toe doen. Deze dingen tonen zich.

Het verhaal van de zoektocht naar absolute zekerheid is hierboven verteld vanuit het perspectief van een man die hoopte absolute ware antwoorden te krijgen. Want Russell droomde de droom van Leibniz: het vinden van een perfect logische methode om alle problemen op te lossen. Deze droom heeft hij en niemand na hem kunnen waarmaken. De zoektocht zou na Gödel nooit meer worden wat hij was.